Лекция 2 Числовая последовательность, её предел.

Тлеулесова А.М.

1) Определение числовой последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

2) Предел последовательности.

3) Свойства сходящихся последовательностей.

4) Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

5) Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число е.

Числовые последовательности

Определение:

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ поставлено в соответствие действительное число x_n.

Тогда множество пронумерованных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**, или **ч.п.**, и обозначается (x_n).

Примеры:

$$(2n) = 2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad \ldots \qquad \left((-1)^n\right) = -1,\quad +1,\quad -1,\quad +1,\quad \ldots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \ldots \qquad \left(\frac{n^2+2}{n+1}\right) = \frac{3}{2},\quad \frac{6}{3},\quad \frac{11}{4},\quad \frac{18}{5},\quad \ldots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно большой***, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in N$, такой что $\forall n\ge n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n|>\varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно малой***, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in N$, такой что $\forall n\ge n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon$.

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n=(-1)^n n$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмём $\forall\varepsilon>0$. Надо найти номер n_ε, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n|>\varepsilon \Leftrightarrow |(-1)^n n|>\varepsilon \Leftrightarrow n>\varepsilon$. Следовательно, $n_\varepsilon=[\varepsilon]+1$.

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{n!}$ является бесконечно малой.

Решение. Возьмём $\forall\varepsilon>0$. Надо найти номер n_ε, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n!}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n!}<\varepsilon$. А так как: $\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}<\dfrac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$,

то искомый номер найдём из неравенства $\dfrac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon. \Rightarrow\ 2^{n-1}>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n-1>\log_2\dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$n_\varepsilon=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

Предел числовой последовательности

Определение:

Число a называется **пределом числовой последовательности** (x_n) при $n \to \infty$,
если для любого сколь угодно малого
числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Также пишут: $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Числовая последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Числовая последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Предел числовой последовательности

Пример 1:

Пределом числовой последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$ является число 0, так как

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

для любого номера *N*, большего целой части числа 1/ε.

Пример 2:

Числовая последовательность $\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)$ расходящаяся,

так как $\frac{3}{2}>\frac{6}{3}>\frac{11}{4}>\frac{18}{5}>\ldots$

Бесконечно большие числовые последовательности

Определение:

Числовая последовательность (x_n) называется **бесконечно большой числовой последовательностью**, или **б.б.ч.п.**, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует такой номер $N = N(M)$, начиная с которого для всех n выполнено неравенство:

$$|x_n| > M.$$

Случай 1. Если $M > 0$ и $x_n > M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

Случай 2. Если $M > 0$ и $x_n < -M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty.$

Примеры: (n^2); $\left(\dfrac{n^2+2}{n+1}\right)$; (q^n) при $q > 1$.

Бесконечно малые числовые последовательности

Определение:

Числовая последовательность (α_n) называется **бесконечно малой числовой последовательностью**, или **б.м.ч.п.**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

или для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(M)$, начиная с которого для всех n выполнено неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Примеры: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$; (q^n) при $|q| < 1$.

Свойства сходящихся числовых последовательностей

1. Единственность предела

Сходящаяся числовая последовательность имеет единственный предел.

2. Предел подпоследовательности

Любая подпоследовательность сходящейся числовой последовательности сходится к такому же пределу.

Следствие:

Если из числовой последовательности можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, то исходная числовая последовательность предела не имеет.

3. Сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Свойства сходящихся числовых последовательностей

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ то, начиная с некоторого номера *N*, все члены числовой последовательности имеют знак, совпадающий со знаком числа *a*.

5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера *N*, выполняется неравенство

$$x_n < y_n$$

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$ Если, начиная с некоторого номера *N*, выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

Если числовые последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

то:

1) $$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$$

2) $$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot a, \quad c = \mathrm{const}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

5) $$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Нахождение пределов числовых последовательностей

Пример 2:

Найти предел числовой последовательности

$$x_n = \sqrt{n^2+3}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

Пример 3:

Найти предел числовой последовательности

$$x_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5}\right)^{2-7n}$$